ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

О КОНГРУЭНЦИЯХ ПАР ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ КОНИКОЙ И ТОЧКОЙ В A_3

Е.А.Щербак

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются конгруэнции пар фигур $F=\{F_1,F_2\}$, где F_1 –центральная коника, а F_2 –точка не инцидентная плоскости коники F_1. Для конгруэнции коник F_1 доказано необходимое и достаточное условие фокальности инвариантной точки коники F_1.

§1. Конгруэнции коник F_1

Отнесем конгруэнцию коник F_1 к частично-канонизированному реперу $R=\{A,\bar e_\alpha\}$ $(\alpha=1,2,3)$, начало A которого совмещено с центром коники F_1, концы E_i векторов $\bar e_i$ расположены на конике F_1 так, что векторы $\bar e_1$ и $\bar e_2$ сопряжены относительно коники F_1 $(i,j=1,2)$. Относительно построенного репера R уравнения коники F_1 имеют вид:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-1=0\ ,\quad x^3=0.$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции коник F_1 записывается в виде

$$\omega^3=\Gamma^3_j\omega^j,\quad \omega^3_i=\Gamma^3_{ij}\omega^j,\quad \omega^i_i=\Gamma^i_{ij}\omega^j,\quad \omega^1_2+\omega^2_1=\Gamma_j\omega^j,$$

где $\omega^1\wedge\omega^2\neq 0$ (здесь и в дальнейшем по i не суммировать). Конгруэнции коник F_1 существуют и определяются с произволом шести функций двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы инвариантная точка M коники F_1 конгруэнции (F_1) являлась ее фокальной точкой, необходимо и достаточно, чтобы касательная к конике F_1 в точке M была инцидентна касательной плоскости поверхности (M) в точке M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия, приведенного в теореме, непосредственно следует из определения фокальных точек коники конгруэнции коник. Для доказательства достаточности совместим конец E_1 вектора $\bar e_1$ репера R с инвариантной точкой M коники F_1. В этом случае формы Пфаффа ω^2_1, ω^1_2 становятся главными, и, следовательно, $\omega^2_1=\Gamma^2_{1j}\omega^j$, $\omega^1_2=\Gamma^1_{2j}\omega^j$. Касательная к конике F_1 в точке $M\equiv E_1$ имеет векторное уравнение $\bar L=\bar A+\bar e_1+\lambda\bar e_2$, где L –текущая точка касательной. Имеем

$$d\bar E_1=\omega^1((1+\Gamma^1_{11})\bar e_1+\Gamma^2_{11}\bar e_2+(\Gamma^3_1+\Gamma^3_{11})\bar e_3)+\omega^2(\Gamma^1_{12}\bar e_1+(1+\Gamma^2_{12})\bar e_2+(\Gamma^3_2+\Gamma^3_{12})\bar e_3).$$

Следовательно, касательная плоскость поверхности (M) в точке M определяется точкой $M\equiv E_1$ и векторами

$$\bar E'_1=(1+\Gamma^1_{11})\bar e_1+\Gamma^2_{11}\bar e_2+(\Gamma^3_1+\Gamma^3_{11})\bar e_3,$$

$$\bar E''_1=\Gamma^1_{12}\bar e_1+(1+\Gamma^2_{12})\bar e_2+(\Gamma^3_2+\Gamma^3_{12})\bar e_3.$$

Так как по условию касательная к конике F_1 в точке M инцидентна касательной плоскости поверхности (M) в точке M, то

$$(1+\Gamma^1_{11})(\Gamma^3_2+\Gamma^3_{12})-\Gamma^1_{12}(\Gamma^3_1+\Gamma^3_{11})=0. \qquad (1)$$

Координаты фокальных точек коники F_1 конгруэнции (F_1) находятся из системы уравнений:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-1=0,\quad x^3=0,$$

$$(\Gamma^1_{11}(x^1)^2+(\Gamma^1_{21}+\Gamma^2_{11})x^1x^2+\Gamma^2_{21}(x^2)^2+x^1)(\Gamma^3_{12}x^1+\Gamma^3_{22}x^2+\Gamma^3_2)- \qquad (2)$$
$$-(\Gamma^1_{12}(x^1)^2+(\Gamma^1_{22}+\Gamma^2_{12})x^1x^2+\Gamma^2_{22}(x^2)^2+x^2)(\Gamma^3_{11}x^1+\Gamma^3_{21}x^2+\Gamma^3_1)=0.$$

Подставляя (1) в (2), убеждаемся, что точка $M\equiv E_1$ является фокальной точкой коники F_1 конгруэнции (F_1).

Рассмотрим конгруэнцию K коник F_1, для которой поверхность (A) является огибающей конгруэнции плоскостей коник F_1, т.е. $\omega^3=0$, $\Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=\Gamma$. Конгруэнции K существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Точки M_1, M'_1 и M_2, M'_2 пересечения коники F_1 конгруэнции K с двумя инвариантными сопряженными диаметрами этой коники тогда и только тогда одновременно являются ее фокальными точками, когда на индикатрисах векторов $(\overline{AM}_i)$ ($i=1,2$) касательные вдоль координатных линий $\omega^i=0$ параллельны векторам $\overline{AM}_j$ ($i\neq j$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства совместим конец E_1 вектора $\bar{e}_1$ репера R с инвариантной точкой M_1, тогда конец E_2 вектора $\bar{e}_2$ совпадает с точкой M_2. Имеем $\bar{M}_i=\bar{A}+\bar{e}_i$, $\bar{M}_i'=\bar{A}-\bar{e}_i$. В этом случае $\omega_1^2=\Gamma_{1j}^2\omega^j$, $\omega_2^1=\Gamma_{2j}^1\omega^j$. Если точки M_i и M_i' являются фокальными точками коники F_1 конгруэнции K, то из уравнений (2) следует:

$$\Gamma=0,\ \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^3=0,\ \Gamma_{21}^2\Gamma_{22}^3=0. \qquad (3)$$

Исключая из рассмотрения случай, когда индикатрисы векторов $\bar{e}_i$ являются коническими поверхностями, из (3) будем иметь: $\Gamma=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^2=0$. Рассмотрим

$$(d\bar{e}_i)_{\omega^i=0}=\omega^j(\Gamma_{ij}^1\bar{e}_1+\Gamma_{ij}^2\bar{e}_2+\Gamma\bar{e}_3).$$

Если $(d\bar{e}_i)_{\omega^i=0}$ параллелен вектору $\bar{e}_j$, то

$$\Gamma=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^2=0. \qquad (4)$$

Сравнивая условия (3) и (4), убеждаемся в справедливости теоремы.

§2. Оснащенные конгруэнции K

Будем называть оснащенной конгруэнцией K конгруэнцию пар фигур $F=\{F_1,F_2\}$, где F_1 - центральная коника, описывающая конгруэнцию K, а F_2-точка не инцидентная плоскости коники.

Продолжим канонизацию репера R, построенного в §1. Вектор $\bar{e}_1$ направим параллельно касательной плоскости поверхности (F_2) в точке F_2, а конец E_3 вектора $\bar{e}_3$ совместим с точкой F_2. В этом случае формы Пфаффа ω_1^2, ω_2^1, ω_3^α становятся главными, и, следовательно,

$$\omega_3^\alpha=\Gamma_{3j}^\alpha\omega^j,\quad \omega_1^2=\Gamma_{1j}^2\omega^j,\quad \omega_2^1=\Gamma_{2j}^1\omega^j.$$

Оснащенные конгруэнции K существуют и определяются с произволом восьми функций двух аргументов.

Т е о р е м а 3. Аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции $(A,\vec{e}_3)$ к конгруэнции плоскостей $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ [1] существует тогда и только тогда, когда форма Пфаффа ω_3^3 есть полный дифференциал некоторой функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции $(A,\vec{e}_3)$ к конгруэнции плоскостей $(A,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ для данной конгруэнции имеют вид:

$$\omega_3^1\wedge\omega_1^3+\omega_3^2\wedge\omega_2^3=0. \qquad (5)$$

Форма Пфаффа ω_3^3 тогда и только тогда является полным дифференциалом, когда

$$\omega_3^1\wedge\omega_1^3+\omega_3^2\wedge\omega_2^3=0. \qquad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), убеждаемся в справедливости теоремы.

Библиографический список

1. Т к а ч Г.П. Аффинно- расслояемые пары многообразий в трехмерном эквиаффинном пространстве // Тез. докл. V Всесоюз. межвуз конф. по геометрии.- Самарканд, 1972. С. 215.

2. Т к а ч Г.П. О некоторых классах аффинно-расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат. сб. науч. тр. Калинингр. ун-т. Калининград. 1973. Вып. 3. С. 143-152.

3. Ф и н и к о в П.С. Теория пар конгруэнций : Учебник.- М. : Госиздат, 1956.